

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Скопенков, Основы теории узлов и зацеплений для пользователя,
Матем. просв., 2021, выпуск 27, 128–165

<https://www.mathnet.ru/mp999>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.24.32.203

3 ноября 2025 г., 18:45:47



Основы теории узлов и зацеплений для пользователя

А. Б. Скопенков

Это методическая статья. Мы определяем простые инварианты узлов и зацеплений (коэффициент зацепления, инварианты Арфа — Кэссона и многочлен Александера — Конвея), чтобы получить интересные результаты, формулировки которых доступны неспециалисту. Простейшие инварианты естественно появляются при попытках распутать узел или зацепление. Затем мы представляем рекурсивные скейн-соотношения для простейших инвариантов, которые позволяют ввести более сложные инварианты. Мы формулируем теорему Васильева — Концевича в виде, удобном для вычисления самих инвариантов, а не только размерности пространства инвариантов. Предварительных знаний не требуется; мы даём строгие определения основных объектов на языке, не препятствующем их интуитивному пониманию.

Содержание

§ 1. Основные определения и результаты об узлах	129
§ 2. Основные определения и результаты о зацеплениях	132
§ 3. Основные инструменты	135
§ 4. Гауссов коэффициент зацепления по модулю 2	137
§ 5. Арф-инвариант	138
§ 6. Приложение: правильные раскраски	140
§ 7. Ориентированные узлы и зацепления; связные суммы	141
§ 8. Гауссов коэффициент зацепления	145
§ 9. Инвариант Кэссона	147
§ 10. Полином Александера — Конвея	148
§ 11. Инварианты Васильева — Гусарова	150
§ 12. Приложение: некоторые доказательства, указания и решения .	152

Частично поддержан грантом РФФИ № 19–01–00169 и грантом фонда Саймонса–НМУ.

О СТИЛЕ ЭТОГО ТЕКСТА

Как правило, я привожу формулировку красивого или важного утверждения перед последовательностью определений и результатов, составляющих его доказательство. В таких случаях для доказательства утверждения требуется часть дальнейшего материала. Об этом указано после формулировок (но я не хочу лишать вас удовольствия найти момент, когда вы наконец-то сможете доказать такое утверждение). Некоторые теоремы приведены без доказательств, тогда даются ссылки вместо указаний.

Утверждения в этом тексте — простые элементы теории (для читателя, частично знакомого с материалом, они являются краткими напоминаниями). С той же целью приведено небольшое количество задач. Указания, решения и доказательства к утверждениям, задачам, теоремам и леммам приведены в § 12. Однако рекомендую читателю подумать над ними самостоятельно. «Обучение путём решения задач не только характерно для серьёзного изучения математики [HC19, § 1.1], [ZSS, § 1.2], но и продолжает древнюю культурную традицию¹⁾ [IRS, с. 165]».

Замечания формально не используются в дальнейшем.

Англоязычную версию статьи см. в [Sk20u].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ УЗЛАХ

Начнём с неформального описания основных понятий (строгие определения даны после замечания 1.2). Узел можно представить себе как тонкую эластичную верёвку, концы которой склеены (рис. 1). Как и на этом рисунке, узлы обычно изображаются с помощью их «удобной» проекции на плоскость, которая называется *диаграммой узла*. Представьте, что вы раскладываете верёвку на столе, тщательно записывая, как она пересекает себя (т. е.

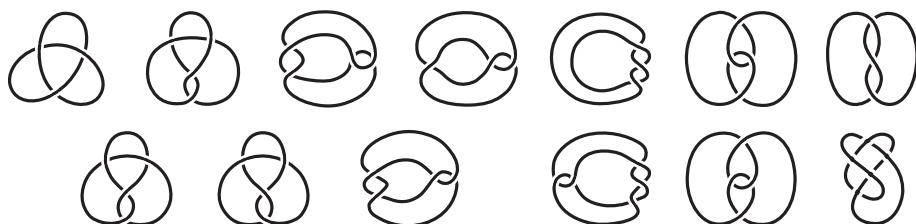


Рис. 1. Узлы, изотопные трилистнику (верхний ряд) и восьмёрке (нижний ряд)

¹⁾ Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [Su92].

какая часть верёвки лежит сверху). Необходимо помнить, что проекции одного и того же узла на разные плоскости могут выглядеть по-разному.

Тривиальный узел — это контур (граница) треугольника.

Под *изотопией* узла понимается его непрерывная деформация в пространстве как тонкой эластичной нити; любые самопересечения нити во время деформации запрещены. Два узла называются *изотопными*, если один из них можно преобразовать в другой с помощью изотопии.

Утверждение 1.1. (a) Все узлы, представленные в верхнем ряду на рис. 1, изотопны друг другу. (Для одной пары из этих узлов представьте изотопию с помощью движений Рейдемейстера, показанных на рис. 9.)

(b) То же верно для узлов в нижнем ряду на рис. 1.

(c) Все узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

Замечание 1.2 (почему строгое определение изотопии необходимо?). На рис. 2 показана изотопия между трилистником и тривиальным узлом.

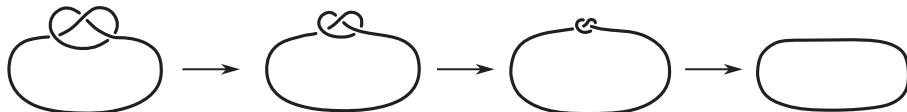


Рис. 2. Необъемлемая изотопия между трилистником и тривиальным узлом

Действительно ли это изотопия? Это так называемая «кусочно-линейная необъемлемая изотопия», которая отличается от «кусочно-линейной объемлемой изотопии», определённой и используемой далее. (Первое понятие лучше отражает идею непрерывной деформации без самопересечений, но малодоступно для старшеклассников, ср. [Sk16i].) На самом деле, любые два узла кусочно-линейно необъемлемо изотопны!

Обычная проблема при работе с интуитивными определениями не в том, что их трудно сделать строгими, а в том, что это можно сделать разными неэквивалентными способами.

Узел — это пространственная замкнутая несамопересекающаяся ломаная²⁾.

Плоская диаграмма узла — это его проекция общего положения³⁾ на плоскость⁴⁾, вместе с информацией, какая часть узла «проходит под»

²⁾ Его не следует путать с ориентированным узлом, определённым далее в § 7.

³⁾ Ломаная на плоскости называется ломаной общего положения, если существует ломаная L с тем же объединением рёбер такая, что никакие три вершины ломаной L не лежат на одной прямой, и никакие три отрезка, соединяющие некоторые вершины ломаной L , не имеют общей внутренней точки.

⁴⁾ Терминология университетской математики — «образ общего положения при проекции на плоскость».

(проход), а какая — «проходит над» (переход) в каждом конкретном перекрёстке.

Утверждение 1.3. Для любой диаграммы узла существует узел, процирующийся на эту диаграмму. (Такой узел не обязательно единственный; см. впрочем утверждение 1.1(с).)

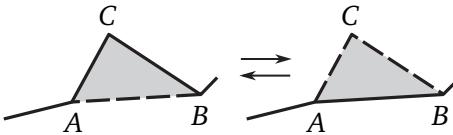


Рис. 3. Элементарное движение

Предположим, что стороны AC и CB треугольника ABC — рёбра некоторого узла. Кроме того, предположим, что узел и часть плоскости, ограниченная треугольником ABC , ни в каких других точках не пересекаются. **Элементарное движение** $ACB \rightarrow AB$ — это замена двух рёбер AC и CB ребром AB , либо обратная операция $AB \rightarrow ACB$ (рис. 3)⁵⁾. Два узла K, L называются (кусочно-линейно объемлемо) **изотопными**, если существует последовательность узлов K_1, \dots, K_n такая, что $K_1 = K$, $K_n = L$, и каждый узел последовательности K_{j+1} получен из предыдущего узла K_j элементарным движением.

ТЕОРЕМА 1.4. (a) Следующие узлы попарно не изотопны: тривязальный узел, трилистник, восьмёрка.

(b) Существует бесконечное множество попарно не изотопных узлов.

Эта теорема доказывается с помощью инвариантов Арфа и Кессона, см. § 5 и 9, ср. § 6.

Зеркальный образ узла K — это узел, плоская диаграмма которого получается изменением всех перекрёстков (рис. 8) диаграммы узла K . Из утверждения 1.1 (б) следует, что восьмёрка изотопна своему зеркальному образу.

ТЕОРЕМА 1.5. Трилистник не изотопен своему зеркальному образу.

Теорема 1.5 доказывается с помощью полинома Джонса [PS96, § 3], [CDM, § 2.4]. Доказательство выходит за рамки данного текста.

ТЕОРЕМА 1.6. Если никакие 4 из 7 точек пространства не лежат в одной плоскости, то существует замкнутая ломаная, составленная из некоторых отрезков, соединяющих эти точки, не изотопная контуру треугольника.

⁵⁾ Если треугольник ABC вырожденный, то элементарное движение является либо разбиением ребра, либо обратной операцией.

Эта теорема доказывается с помощью *Арф-инварианта*, см. § 5. Детали выходят за рамки данного текста, см. [CG83, теорема 2].

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ О ЗАЦЕПЛЕНИЯХ

Зацепление — это набор попарно непересекающихся узлов, которые называются *компонентами* зацепления. Упорядоченные наборы называются *упорядоченными* или *раскрашенными* зацеплениями, в то время как неупорядоченные наборы называются *неупорядоченными* или *нераскрашенными* зацеплениями. В этом тексте под словом «зацепление» понимается «упорядоченное зацепление».

Тривиальное зацепление (с любым числом компонент) — это зацепление, состоящее из треугольников, лежащих в параллельных плоскостях.

Плоские диаграммы и изотопии для зацеплений определяются так же, как и для узлов.

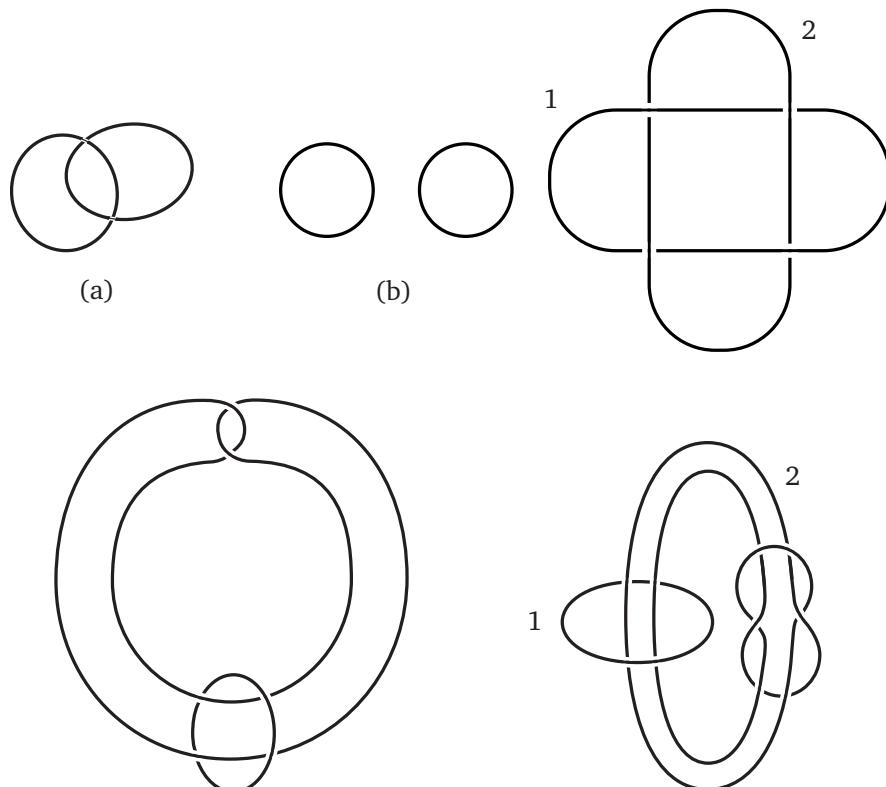


Рис. 4. Зацепление Хопфа, тривиальное зацепление и ещё три зацепления

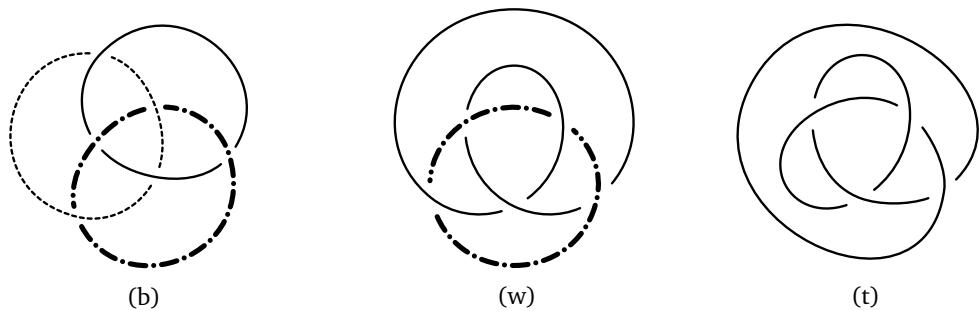


Рис. 5. Кольца Борромео, зацепление Уайтхеда и трилистник

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. (a) Зацепление Хопфа изотопно зацеплению, полученному из него перестановкой компонент.

(b) Зацепление Хопфа изотопно некоторому зацеплению, компоненты которого симметричны относительно некоторой прямой.

(c) Зацепление на рис. 4 внизу слева изотопно зацеплению Уайтхеда на рис. 5 (w).

(d, e) То же, что и в пп. (a), (b) для зацепления Уайтхеда.

(f) Кольца Борромео изотопны зацеплению, компоненты которого переставляются по циклу при повороте на угол $2\pi/3$ относительно некоторой прямой.

Доказательство. (a) Это следует из п. (b) (или может быть доказано независимо).

(d) Это следует из п. (e) (или может быть доказано независимо).

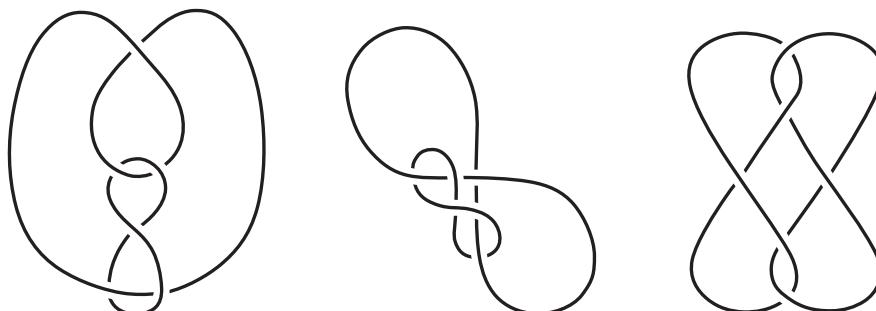


Рис. 6. Изотопия зацепления Уайтхеда

(e) См. рис. 6.

(f) Рассмотрим серые четырёхугольники на рис. 7 слева. Искомая прямая является биссектрисой любого октанта, образованного четырёхугольниками.

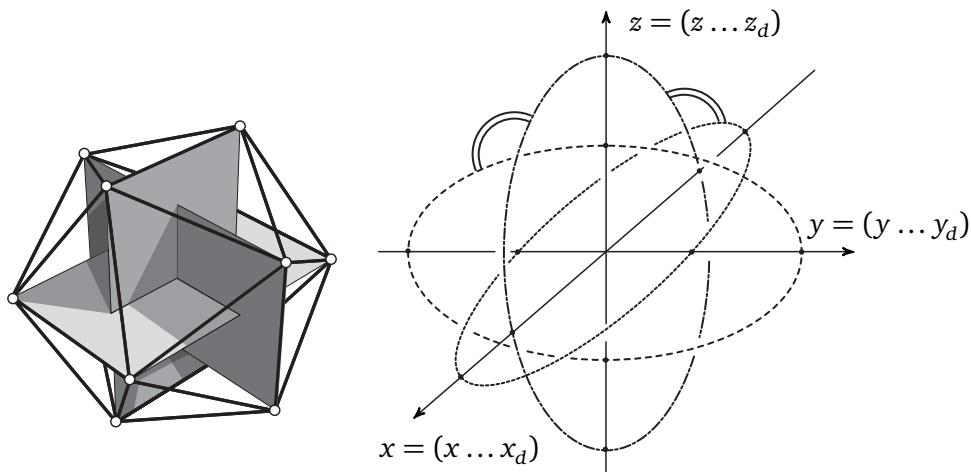


Рис. 7. Кольца Борромео

Существует также следующая изящная криволинейная конструкция. Возьмём три эллипса, заданные системами уравнений:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y^2 + 2z^2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ z^2 + 2x^2 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases}$$

(см. рис. 7 справа). Искомая прямая задаётся уравнением $x = y = z$. \square

Теорема 2.2. (a) Следующие зацепления попарно не изотопны: зацепление Хонфа, тривиальное зацепление, зацепление Уайтхеда.

(b) Кольца Борромео не изотопны тривиальному зацеплению.

Эта теорема доказывается с помощью коэффициента зацепления по модулю 2, придумайте его самостоятельно или см. § 4, и полинома Александера — Конвея, см. § 10. Также можно использовать «тройной коэффициент зацепления» (инвариант Масси — Милнора) и «высший коэффициент зацепления» (инвариант Сато — Левина) [Sk, § 4.4–4.6].

Теорема 2.3. Если никакие 4 из 6 точек пространства не лежат в одной плоскости, то существует пара зацепленных треугольников с вершинами в этих 6 точках. (Это означает, что внутренность первого треугольника пересекает контур второго треугольника ровно в одной точке.)

Эта теорема доказывается с помощью коэффициента зацепления по модулю 2, см. § 4. Детали выходят за рамки данного текста, см. [CG83, теорема 1] и простое изложение в [Sk14, теорема 1.1].

§ 3. Основные инструменты

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1 (некоторые строгие рассуждения). В следующем абаце мы доказываем, что *если узел лежит в плоскости, то он изотопен тривиальному узлу*.

Обозначим узел, лежащий в плоскости, через $M_1M_2 \dots M_n$. Возьмём точку Z вне этой плоскости. Тогда $M_1M_2 \dots M_n$ преобразуется в тривиальный узел M_1ZM_n следующей последовательностью элементарных движений:

$$M_1M_2 \rightarrow M_1ZM_2, \quad ZM_2M_3 \rightarrow ZM_3, \quad ZM_3M_4 \rightarrow ZM_4, \quad \dots, \quad ZM_{n-1}M_n \rightarrow ZM_n.$$

Следующий результат показывает, что промежуточные узлы изотопии, переводящей узел, лежащий в плоскости, в тривиальный узел, можно выбрать также лежащими в плоскости.

Теорема Шёнфлиса. *Любая ломаная без самопересечений в плоскости изотопна (в этой плоскости) треугольнику.*

Это усиленная версия следующего выдающегося результата.

Теорема Жордана. *Любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная L в плоскости \mathbb{R}^2 разбивает эту плоскость в точности на две части, т. е. $\mathbb{R}^2 - L$ — несвязное множество, являющееся объединением двух связных множеств.*

Подмножество плоскости называется *связным*, если любые две точки этого подмножества можно соединить ломаной, в нём лежащей.

Алгоритмическое объяснение, почему теорема Жордана (а значит, и теорема Шёнфлиса) нетривиальна, и доказательство теоремы Жордана см. [Sk18], [Sk]: § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости».

Утверждение 3.2. *Предположим, что существует такая точка узла, что если мы идём вдоль узла, начиная с этой точки, то на некоторой диаграмме мы сначала встречаем только переходы, а затем только проходы. Тогда этот узел изотопен тривиальному узлу⁶⁾.*

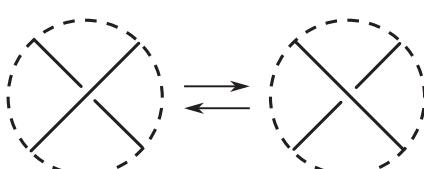


Рис. 8. Изменение перекрёстка. Плоские диаграммы совпадают вне кругов, ограниченных пунктиром. Никакие другие рёбра плоских диаграмм, кроме показанных на рисунке, не пересекаются с этими кругами. (Те же соглашения приняты на рис. 9–12 и 21)

⁶⁾ Это утверждение будет мотивировкой для введения Арф-инварианта (§ 5).

Доказательство иллюстрирует в малых размерностях основные идеи выдающегося доказательства Зимана многомерной теоремы о незаузленности сфер, см. обзор [Sk16c, теорема 2.3].

Изменение перекрёстка — это замена перехода на проход или наоборот (рис. 8).

Очевидно, после любого изменения перекрёстка в крайних слева диаграммах трилистника и восьмёрки, показанных на рис. 1, получится диаграмма узла, изотопного тривиальному.

Лемма 3.3. *Любая диаграмма узла может быть преобразована изменениями перекрёстков в диаграмму узла, изотопного тривиальному⁷⁾.*

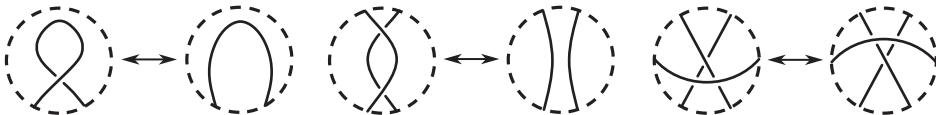


Рис. 9. Движения Рейдемайстера

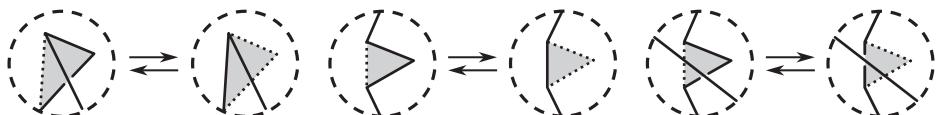


Рис. 10. Слева: к строгому определению первого движения Рейдемайстера.
В середине, справа: движения изотопии плоскости

В этом тексте вместо изучения узлов с точностью до изотопии мы будем изучать диаграммы узлов с точностью до эквивалентности, порождённой **движениями Рейдемайстера**⁸⁾ (рис. 9) и **движениями изотопии плоскости** (см. рис. 10 в середине и справа). То есть мы будем использовать без доказательства следующий результат.

Теорема 3.4 (Рейдемайстер). *Два узла изотопны тогда и только тогда, когда некоторая диаграмма первого узла может быть получена из некоторой диаграммы второго узла с помощью движений Рейдемайстера и движений изотопии плоскости.*

См. [PS96, § 1.7] по поводу доказательства⁹⁾.

Справедливы также аналоги леммы 3.3 и теоремы 3.4 для зацеплений.

⁷⁾ Эта простая лемма будет использована для построения инвариантов, использующего рекурсию (скейн-соотношения), см. теоремы 4.4, 5.4, 4.4, 9.4, 10.2 и 11.1.

⁸⁾ Страгое определение первого движения Рейдемайстера легко даётся с помощью рис. 10 слева. У других движений Рейдемайстера есть аналогичные строгие определения. Вы можете использовать неформальное описание движений Рейдемайстера на рис. 9 и, таким образом, не пользоваться движениями изотопии плоскости. См. сноску 9.

⁹⁾ Так как в [PS96, § 1.6] нет такого же строгого определения для движений Рейдемайстера, как для движений изотопии плоскости, рассуждения в [PS96,

§ 4. Гауссов коэффициент зацепления по модулю 2

Предположим, что существует изотопия между двумя двухкомпонентными зацеплениями и вторая компонента фиксирована в процессе изотопии. Тогда след первой компоненты — самопересекающийся цилиндр, не имеющий общих точек со второй компонентой. Если после изотопии компоненты расцеплены, то цилиндр можно дополнить до самопересекающегося диска, не имеющего общих точек со второй компонентой. Это наблюдение, вместе с [Sk, лемма 4.3.2 о проекции], мотивирует следующее определение.

Коэффициентом зацепления по модулю два lk_2 плоской диаграммы двухкомпонентного зацепления называется взятое по модулю 2 число таких перекрёстков диаграммы, для которых первая компонента проходит над второй компонентой.

Задача 4.1. Найдите коэффициент зацепления по модулю 2 для диаграмм на рис. 4 и для пар колец Борромео на рис. 5 (b).

Лемма 4.2. *Коэффициент зацепления по модулю 2 сохраняется при движении Рейдемейстера.*

Эта лемма легко доказывается отдельно для каждого движения Рейдемейстера.

По лемме 4.2 **коэффициент зацепления по модулю 2** двухкомпонентного зацепления (или даже его изотопического класса) можно корректно определить как коэффициент зацепления по модулю 2 любой диаграммы этого зацепления.

§ 1.7] не являются строгим доказательством. По-видимому, строгое доказательство может быть получено с использованием строгого определения движений Рейдемейстера.

Это также показывает, что наличие движений изотопии плоскости в утверждении из [PS96, § 1.7] не делает само утверждение строгим. Работая на интуитивном уровне, движения изотопии плоскости лучше не упоминать. С помощью приведённого ниже альтернативного строгого определения движения изотопии плоскости выражаются через движения Рейдемейстера, а потому не должны отдельно упоминаться в формулировке теоремы.

Приведём альтернативное строгое определение первого движения Рейдемейстера. У других движений Рейдемейстера есть аналогичные строгие определения. Возьмём на плоскости замкнутую несамопересекающуюся ломаную L , внутренность которой (см. теорему Жордана в замечании 3.1) пересекает диаграмму D по несамопересекающейся ломаной M , соединяющей две точки на L . Обозначим через N замкнутую несамопересекающуюся ломаную во внутренности ломаной L , для которой $N \cap L = \emptyset$, $N \cap M$ — одна точка, а $M \cup N$ — (самопересекающаяся) ломаная общего положения. *Первое движение Рейдемейстера* — это замена M на $M \cup N$ в D с любой «информацией» в появившемся перекрёстке.

Будем использовать без доказательства следующую лемму о чётности: любые две замкнутые ломаные на плоскости, вершины которых находятся в общем положении, пересекаются в чётном числе точек. Обсуждение и доказательство этой леммы см. [Sk18, Sk], § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости».

Утверждение 4.3. (а) Перестановка компонент двухкомпонентного зацепления сохраняет коэффициент зацепления по модулю 2.

(б) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, но имеющее нулевой коэффициент зацепления по модулю 2.

Пункт (б) доказывается с помощью целочисленного коэффициента зацепления, см. § 8.

Теорема 4.4. Существует единственный изотопический инвариант lk_2 двухкомпонентных зацеплений, принимающий значения в \mathbb{Z}_2 , равный нулю на тривиальном зацеплении и такой, что для любых зацеплений K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются изменением перекрёстка A ,

$$\text{lk}_2 K_+ - \text{lk}_2 K_- = \begin{cases} 1, & A \text{ — пересечение различных компонент;} \\ 0, & A \text{ — самопересечение одной из компонент.} \end{cases}$$

Утверждение 4.5. Если коэффициент зацепления по модулю 2 двух (непересекающихся контуров) треугольников в пространстве равен нулю, то зацепление, образованное этими треугольниками, изотопно тривиальному.

Доказательство, по-видимому, не опубликовано, однако оно не очень сложное. Мы призываем читателя опубликовать подробное рассуждение. Ср. [Ко19].

§ 5. Арф-инвариант

Рассмотрим плоскую диаграмму некоторого узла и её точку P , не являющуюся перекрёстком. Назовём P отмеченной точкой. Неупорядоченная пара перекрёстков A, B называется **скрещивающейся** (или P -скрещивающейся), если, обходя диаграмму в каком-нибудь направлении, начиная с P , и отмечая только перекрёстки в A и в B , мы сначала встретим переход в A , затем проход в B , затем проход в A и, наконец, переход в B . Далее, P -Арф-инвариантом arf_P плоской диаграммы называется чётность числа её P -скрещивающихся пар перекрёстков.

Задача 5.1. (а) Если P -Арф-инвариант плоской диаграммы не равен нулю, то P не может быть точкой из утверждения 3.2.

(b) Найдите P -Арф-инвариант (какой-нибудь плоской диаграммы) тривиального узла, трилистника и восьмёрки (при Вашем выборе отмеченной точки P).

ЛЕММА 5.2. (a) *Арф-инвариант не зависит от выбора отмеченной точки P .*

(b) *Арф-инвариант плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.*

Согласно п. (a) Арф-инвариант плоской диаграммы можно корректно определить как её P -Арф-инвариант для произвольной отмеченной точки P . Поэтому формулировка п. (b) осмысленна. Согласно п. (b) Арф-инвариант arf узла (или даже изотопического класса узлов) можно корректно определить как Арф-инвариант произвольной плоской диаграммы этого узла.

УКАЗАНИЯ. (a) Будем перемещать отмеченную точку вдоль плоской диаграммы. Тогда достаточно показать, что Арф-инвариант не изменяется, когда отмеченная точка проходит через перекрёсток.

(b) Докажите утверждение для каждого движения Рейдемейстера отдельно, всякий раз выбирая отмеченную точку наиболее удобным образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *Существует узел, не изотопный тривиальному, Арф-инвариант которого равен нулю.*

Это доказывается с помощью инварианта Кэссона, см. § 9.



Рис. 11. Зацепления K_+ , K_- , K_0

ТЕОРЕМА 5.4. *Существует единственный изотопический инвариант arf узлов, принимающий значения в \mathbb{Z}_2 , равный нулю на тривиальном узле и такой, что $\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \text{lk}_2 K_0$ для любых узлов K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются как показано на рис. 11, причём K_0 является двухкомпонентным зацеплением. (Последнее эквивалентно существованию ориентации, для которой рис. 11 превращается в рис. 21.)*

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. *Два узла называются Арф-эквивалентными, если какая-нибудь диаграмма первого узла (с некоторой ориентацией) может*

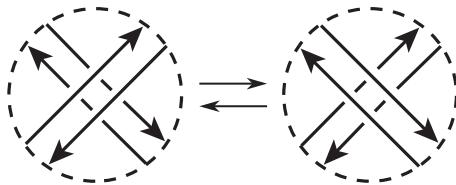


Рис. 12. Пронос

быть преобразована в какую-нибудь диаграмму второго узла (с некоторой ориентацией) движениями Рейдемейстера и с помощью проносов, показанных на рис. 12.

(a) Если два узла Арф-эквивалентны, то их Арф-инварианты совпадают.

(b) Восьмёрка Арф-эквивалентна трилистнику.

(c) [Ka87, с. 75–78] Если у двух узлов Арф-инварианты совпадают, то эти узлы Арф-эквивалентны.

§ 6. ПРИЛОЖЕНИЕ: ПРАВИЛЬНЫЕ РАСКРАСКИ

Этот параграф иллюстрирует связь с раскрасками в комбинаторике [Ra20]. Он использует только материал § 1 и 2. Подробнее про правильные раскраски см. в [Pr98].

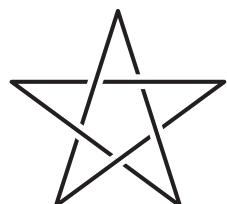
Дугой на плоской диаграмме (узла или зацепления) называется связный фрагмент ломаной, идущий от одного прохода до следующего. **Правильная раскраска** плоской диаграммы (узла или зацепления) — это такая раскраска её дуг в три цвета, что по крайней мере два цвета использовано и в каждом перекрёстке встречаются либо все три цвета, либо только один цвет. Плоская диаграмма (узла или зацепления) называется **раскрашиваемой в три цвета**, если её можно правильно раскрасить.

Задача 6.1. Для каждого из следующих узлов или зацеплений возьмите любую плоскую диаграмму и определите, является ли она раскрашиваемой в три цвета: (a) тривиальный узел; (b) трилистник; (c) восьмёрка; (d)–(i) зацепления на рис. 4 и 5 (b).

Лемма 6.2 [Pr95, с. 29–30, теорема 4.1]. *Раскрашиваемость в три цвета плоской диаграммы сохраняется при движениях Рейдемейстера.*

Теорема 6.3. (a) Ни одно из зацеплений на рис. 4 и 5 (кроме тривиального зацепления) не изотопно тривиальному зацеплению.

(b) Узел 5_1 не изотопен тривиальному узлу (рис. 13).

Рис. 13. Узел 5_1

§ 7. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ УЗЛЫ И ЗАЦЕПЛЕНИЯ; СВЯЗНЫЕ СУММЫ

Вы знаете, что такое ориентированная ломаная, так что вы также знаете, что такое ориентированный узел (рис. 14).

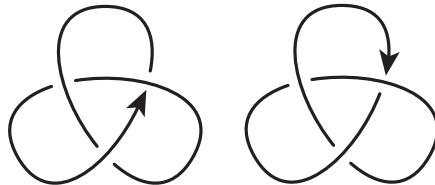


Рис. 14. Два трилистника с противоположными ориентациями

Неформальное понятие и строгое определение *изотопии* ориентированных узлов даются аналогично изотопии узлов.

Утверждение 7.1. *Изотопные ориентированные ломаные без самопересечений на плоскости и на сфере определяются аналогично изотопным ориентированным узлам в пространстве.*

(a) *Ориентированный сферический треугольник изотопен на сфере тому же треугольнику с противоположной ориентацией.*

(b) *Аналог пункта (a) для плоскости неверен.*

Утверждение 7.2. *Следующие пары узлов с противоположными ориентациями изотопны: два тривальных узла; два трилистника; две восьмёрки.*

Теорема 7.3 (Троттер, 1964). *Существует ориентированный узел, не изотопный такому же узлу с противоположной ориентацией.*

Этот факт доказывается с использованием полинома Джонса [PS96, § 3], [CDM, § 2.4]; доказательство выходит за рамки данного текста.

Связная сумма # ориентированных узлов определена на рис. 15.

Связная сумма # (неориентированных) узлов определяется аналогично (забудьте про стрелки). Ни та, ни другая операция не является корректно определённой на множестве узлов или ориентированных узлов соответственно; см. также замечание 7.5. Так что мы обозначаем через $K \# L$ любую из связных сумм узлов или ориентированных узлов K и L .

Утверждение 7.4. *Для любых ориентированных узлов K, L, M и тривального ориентированного узла O имеем*

- (a) $K \# O = K$;
- (b) $K \# L = L \# K$;
- (c) $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$;

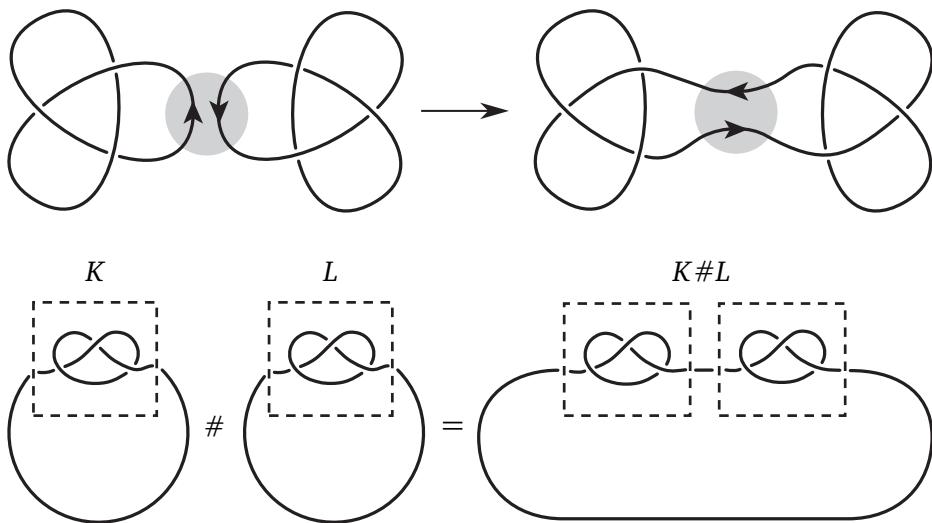


Рис. 15. Связная сумма узлов

(d) Для любых неориентированных узлов \$K, L\$ выполнено

$$\text{arf}(K \# L) = \text{arf } K + \text{arf } L.$$

(Строгий смысл пункта (a) — «существует связная сумма узлов \$K\$ и \$O\$, изотопная узлу \$K\$». Строгий смысл пунктов (b), (c) и (d) аналогичен. См., впрочем, замечание 7.5.)

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. (а) См. рис. 16.

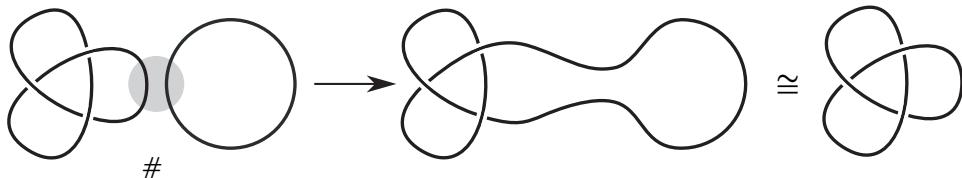


Рис. 16. Доказательство равенства \$K \# O = K\$

(б) Достаточно взять «маленький» узел, изотопный узлу \$L\$, и «провести» его через узел \$K\$, см. рис. 17 слева.

(с) Узлы из левой и правой частей равенства изотопны узлу на рис. 17 справа.

(д) Выберите отмеченную точку \$P\$ близко к «месту соединения» узлов. Проверьте, что всякая \$P\$-скрещивающаяся пара перекрёстков в \$K \# L\$ получается либо из скрещивающейся пары перекрёстков в \$K\$, либо из скрещивающейся пары перекрёстков в \$L\$. \square

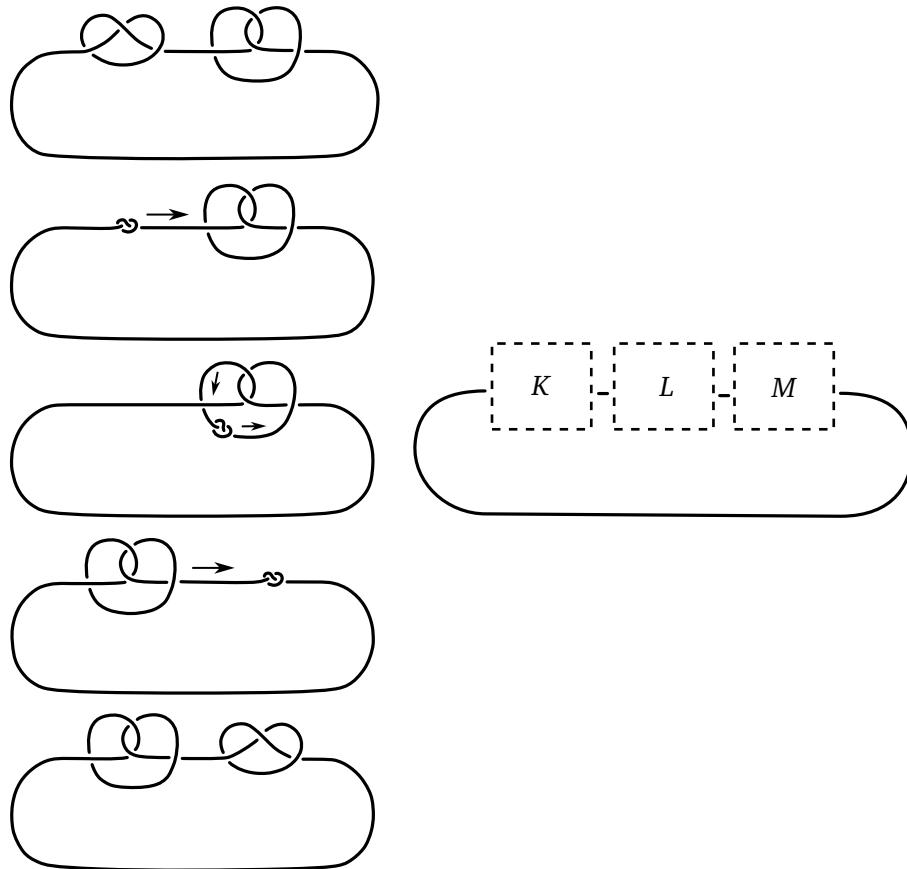


Рис. 17. Доказательства равенств $K \# L = L \# K$ (слева) и $(K \# L) \# M = K \# (L \# M)$ (справа)

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Изотопический класс узла — это множество всех узлов, ему изотопных. Ориентированный изотопический класс $[K \# L]$ связной суммы двух ориентированных изотопических классов $[K]$, $[L]$ ориентированных узлов K , L не зависит от выборов, сделанных в процессе построения, и от выбора представителей K , L классов $[K]$, $[L]$. Следовательно, связная сумма ориентированных изотопических классов ориентированных узлов корректно определена как $[K] \#[L] := [K \# L]$, см. [Sk15, замечание 2.3.а]. Для изотопических классов неориентированных узлов связная сумма не является корректно определённой операцией [CSK].

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть K, L, M — изотопические классы ориентированных узлов, а O — изотопический класс ориентированного тривиального узла. Тогда (a) если $K \# L = O$, то $K = L = O$; (b) если $K \# L = K \# M$, то $L = M$.

Доказательство выходит за рамки данного текста, см. [PS96, теорема 1.5]. (В этом отрывке из [PS96] необходимо всюду заменить «узел» на «ориентированный узел» ввиду замечания 7.5.)

Связная сумма $\#$ зацеплений (упорядоченных или нет, ориентированных или нет) определяется аналогично связной сумме узлов (рис. 18). Эта

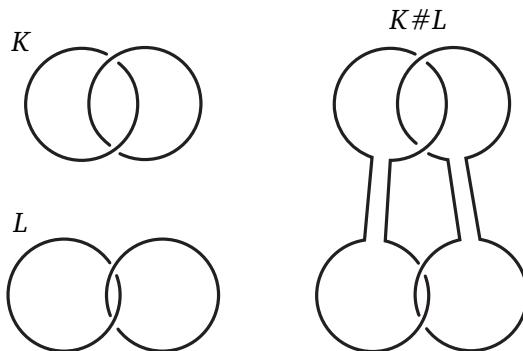


Рис. 18. Связная сумма зацеплений

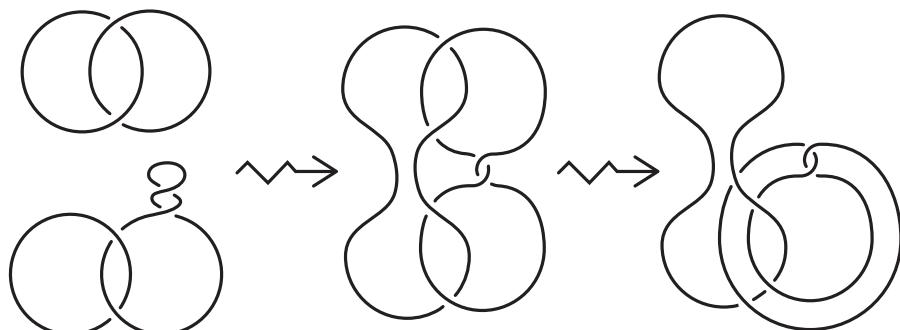
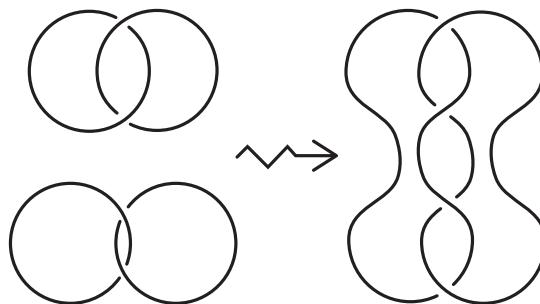


Рис. 19. Связная сумма изотопических классов зацеплений не определена корректно

операция не является корректно определённой для зацеплений, и замечание 7.8 показывает, что эта операция также не даёт корректно определённого понятия связной суммы изотопических классов зацеплений. Так что мы обозначаем через $K \# L$ любую связную сумму зацеплений K и L .

Утверждение 7.7. (a), (b), (c) Докажите аналоги утверждений 7.4 (a), (b), (c) для зацеплений.

(d) Для любых неориентированных двухкомпонентных зацеплений K, L выполнено $\text{lk}_2(K \# L) = \text{lk}_2 K + \text{lk}_2 L$.

Замечание 7.8. Существуют две изотопные пары (K, L) и (K', L') двухкомпонентных зацеплений такие, что некоторые связные суммы $K \# L$ и $K' \# L'$ не изотопны. (Зацепления могут быть упорядочены или нет, ориентированы или нет — всего получается 4 утверждения.) Для случая неупорядоченных зацеплений пример даётся парой одинаковых зацеплений, каждое из которых состоит из трилистника и тривиального узла, содержащихся в непересекающихся кубах, ср. [PS96, рис. 3.16]. Пример для случая упорядоченных зацеплений содержится в [As]. На рис. 19 показан другой пример, предложенный А. Рябичевым.

§ 8. Гауссов коэффициент зацепления

Пусть $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ — упорядоченная пара векторов (ориентированных отрезков) на плоскости, пересекающихся в точке P . Определим **знак** точки P как $+1$, если ABC ориентирован по часовой стрелке, и как -1 в противном случае (рис. 20).

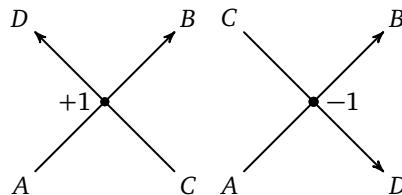


Рис. 20. Знак точки пересечения

Коэффициент зацепления lk плоской диаграммы ориентированного двухкомпонентного зацепления — это сумма знаков всех точек пересечения на диаграмме, в которых первая компонента проходит над второй компонентой. В каждом перекрёстке *первый (второй)* вектор — это звено *первой (второй)* компоненты.

Задача 8.1. Найдите коэффициент зацепления для (некоторой плоской диаграммы) зацепления Хопфа и пары колец Борромео, выбрав ориентацию компонент самостоятельно.

ЛЕММА 8.2. Коэффициент зацепления сохраняется при движениях Рейдемайстера.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2. Достаточно проверить, что знаки всех перекрёстков не изменяются.

По лемме 8.2 **коэффициент зацепления** ориентированного двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопности) корректно определён как коэффициент зацепления любой плоской диаграммы зацепления.

Модуль коэффициента зацепления (неориентированного) двухкомпонентного зацепления (или его класса изотопии) корректно определён вне зависимости от ориентации компонент.

Будем использовать без доказательства следующую лемму о *тривиальности*: для любых двух замкнутых ломаных в плоскости, вершины которых находятся в общем положении, сумма знаков их точек пересечения равна нулю. Обсуждение и доказательство см. в § 1.3 «Число пересечений для ломаных на плоскости» в [Sk18, Sk].

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.3. (a) Перестановка компонент меняет знак коэффициента зацепления.

(b) Изменение ориентации любой компоненты меняет знак коэффициента зацепления.

(c) Существует ориентированное двухкомпонентное зацепление с коэффициентом зацепления -5 .

(d) Для любой связной суммы $K \# L$ ориентированных двухкомпонентных зацеплений K, L имеем $\text{lk}(K \# L) = \text{lk } K + \text{lk } L$.

(e) Существует двухкомпонентное зацепление, не изотопное тривиальному зацеплению, но имеющее нулевой коэффициент зацепления.

Пункт (e) доказывается с помощью многочлена Александера — Конвея, см. § 10.

ТЕОРЕМА 8.4. Существует единственный целочисленный изотопический инвариант lk_2 ориентированных двухкомпонентных зацеплений, принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что для любых зацеплений K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются изменени-

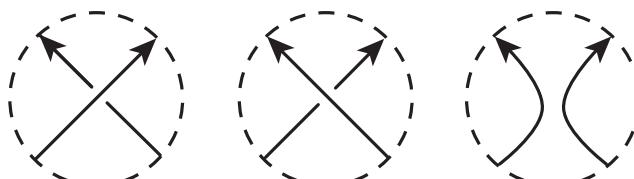


Рис. 21. Ориентированные зацепления K_+, K_-, K_0

ем перекрёстка A , как показано на рис. 21,

$$\text{lk } K_+ - \text{lk } K_- = \begin{cases} 1, & A — \text{пересечение различных компонент;} \\ 0, & A — \text{самопересечение одной из компонент.} \end{cases}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4.

§ 9. Инвариант Кэссона

Знак перекрёстка ориентированной плоской диаграммы узла определён после рисунка 20; первый (второй) вектор — это вектор перехода (прохода). Очевидно, знак не зависит от ориентации диаграммы и таким образом определён для неориентированных диаграмм.

Знак P -скрещивающейся пары перекрёстков на плоской диаграмме узла (для любой отмеченной точки P) — это произведение знаков соответствующих перекрёстков.

P -инвариант Кэссона плоской диаграммы — это сумма знаков всех P -скрещивающихся пар перекрёстков.

Задача 9.1. (a) Аналог задачи 5.1 (b) для инварианта Кэссона.

(b) Нарисуйте плоскую диаграмму узла и отмеченную точку P такие, что P -инвариант Кэссона плоской диаграммы равен -5 .

Лемма 9.2. (a), (b) Аналог леммы 5.2 (a), (b) для инварианта Кэссона.

Поэтому **инвариант** (число) **Кэссона** c_2 плоской диаграммы узла (или даже изотопического класса узла) является корректно определённым инвариантом, если положить его равным P -инварианту Кэссона любой плоской диаграммы этого узла с любой отмеченной точкой P .

Утверждение 9.3. (a), (b) Аналог утверждений 7.4 (d) и 5.3 для инварианта Кэссона.

Пункт (b) доказывается с помощью многочлена Александера — Конвея, см. § 10.

Обозначим через D_+, D_-, D_0 любые три диаграммы ориентированных (узлов или) зацеплений, отличающиеся как показано на рис. 21 (см. соглашения о рисунках в подписи к рис. 8). Также обозначим через K_+, K_-, K_0 любые три зацепления с диаграммами D_+, D_-, D_0 .

Теорема 9.4. Существует единственный целочисленный изотопический инвариант c_2 (неориентированных) узлов, который равен 0 для тривязального узла и такой, что

$$c_2(K_+) - c_2(K_-) = \text{lk } K_0$$

для любых узлов K_+ и K_- , диаграммы которых отличаются как показано на рис. 21. (Отметим, что K_0 обязательно является двухкомпонентным зацеплением; число $\text{lk } K_0$ определено корректно, так как изменение ориентации обеих компонент ориентированного зацепления не меняет коэффициента зацепления.)

§ 10. Полином Александера — Конвея

Этот параграф использует только материал § 1, 2 и 7 (кроме утверждений 10.4 (b), (c), использующих также § 8 и 9).

Задача 10.1. (a) Существует единственный изотопический инвариант ориентированных трёхкомпонентных зацеплений arf со значениями в \mathbb{Z}_2 , принимающий значение 0 на тривиальном зацеплении и такой, что

$$\text{arf } K_+ - \text{arf } K_- = \begin{cases} \text{lk}_2 K_0 & \text{в точке пересечения различных компонент;} \\ 0 & \text{в точке самопересечения одной из компонент.} \end{cases}$$

(Здесь $\text{lk}_2 K_0$ определено, так как K_0 обязательно является двухкомпонентным зацеплением.)¹⁰⁾

(b) Предполагая существование инварианта arf из п. (a), вычислите его для колец Борромео (при вашем выборе ориентаций компонент).

Теорема 10.2. Существует единственная бесконечная последовательность $c_{-1} = 0, c_0, c_1, c_2, \dots$ целочисленных инвариантов ориентированных неупорядоченных зацеплений такая, что:

на тривиальном узле $c_0 = 1$ и $c_1 = c_2 = \dots = 0$;

для любого $n \geq 0$ и зацеплений K_+, K_-, K_0 с рис. 21 выполнено

$$c_n(K_+) - c_n(K_-) = c_{n-1}(K_0).$$

Доказательства существования в утверждении 10.1 (a) и теореме 10.2 выходят за рамки данного текста¹¹⁾. Доказательство см. в [Al28], [Ka06'].

¹⁰⁾ Это утверждение — частный случай версии по модулю 2 теоремы 10.2; было бы интересно получить его прямое доказательство, поскольку оно могло бы проиллюстрировать идею доказательства теоремы 10.2 на простейшем из нетривиальных случаев.

Теорема 5.4 является аналогом данного утверждения для узлов (которые являются однокомпонентными зацеплениями). Определение инварианта arf из § 5 применимо только для узлов, и здесь мы пытаемся обобщить его на трёхкомпонентные зацепления.

¹¹⁾ Не вполне ясно, упорядоченные или неупорядоченные зацепления имеют-
ся в виду в [CDM, § 2.3.1]. Поэтому мы приводим вывод сильной версии
(для неупорядоченных зацеплений) из слабой (для упорядоченных зацеплений) в § 12.

§ 3–5], [Ka06], [Ma18, § 5.5 и 5.6], [Ga19]. Про связь с правильными раскрасками см. в [Ka06', § 6].

Многочлен

$$C(K)(t) := c_0(K) + c_1(K)t + c_2(K)t^2 + \dots$$

называется многочленом Конвея, см. утверждение 10.4 (e). Введение этого многочлена позволяет находить все инварианты c_n так же быстро, как и один из них. Формула из теоремы 10.2 эквивалентна равенству

$$C(K_+) - C(K_-) = tC(K_0).$$

Задача 10.3. Найдите многочлены Конвея следующих зацеплений (выберите сами ориентацию для каждой компоненты):

- (a) тривиальное зацепление с двумя компонентами;
- (b) тривиальное зацепление с n компонентами;
- (c) зацепление Хопфа;
- (d) трилистник;
- (e) восьмёрка;
- (f) зацепление Уайтхеда;
- (g) кольца Борромео;
- (h) узел 5_1 .

Утверждение 10.4. (a) Имеет место равенство $c_0(K) = 1$, если K — узел, и $c_0(K) = 0$ в противном случае (т. е. если K имеет более одной компоненты).

(b) Если K — узел, то $c_{2j+1}(K) = 0$, и c_2 — инвариант Кэссона.

(c) Если K — двухкомпонентное зацепление, то $c_{2j}(K) = 0$, и c_1 — коэффициент зацепления.

(d) Если K — любое k -компонентное зацепление, то $c_j(K) = 0$, если $j \leq k - 2$ или $j - k$ чётно.

(e) Для каждого узла или зацепления все инварианты c_n , кроме конечного числа, обращаются в нуль.

Утверждение 10.5. (a) Изменение ориентации всех компонент зацепления (в частности, изменение ориентации узла) сохраняет многочлен Конвея.

(b) [CDM, 2.3.4] Существует двухкомпонентное зацепление такое, что изменение ориентации одной его компоненты меняет степень многочлена Конвея (в частности, такое изменение ни сохраняет многочлен Конвея, ни меняет его знак).

(c) Для любой связной суммы $K \# L$ узлов K, L верно $C(K \# L) = C(K)C(L)$.

Утверждение 10.6. Зацепление называется разделяемым, если оно изотопно зацеплению, компоненты которого содержатся в непересекающихся шарах.

- (a) Зацепление Хопфа, зацепление Уайтхеда и кольца Борромео не являются разделяемыми зацеплениями.
- (b) Коэффициент зацепления разделяемого зацепления равен нулю.
- (c) Многочлен Конвея разделяемого зацепления нулевой.

§ 11. ИНВАРИАНТЫ ВАСИЛЬЕВА — ГУСАРОВА

Этот параграф использует только материал § 1, 2 и 7 (кроме задачи 11.3 (2), использующей также раздел 9).

Сингулярный (ориентированный) узел — замкнутая ориентированная ломаная в \mathbb{R}^3 , все точки самопересечения которой являются простыми двойными (эти точки не являются вершинами ломаной). Два сингулярных узла *изотопны*, если существует сохраняющий ориентацию кусочно-линейный гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящий первый узел во второй с сохранением ориентации. Обозначим через Σ множество всех изотопических классов сингулярных узлов.

Хордовая диаграмма — слово из $2n$ букв, среди которых ровно n различных, причём каждая буква встречается дважды. Слова, отличающиеся циклическим сдвигом, считаются одинаковыми. Хордовую диаграмму обычно изображают в виде ориентированной окружности с набором хорд, ср. [Sk20, § 1.5]. Для произвольного сингулярного узла K обозначим через $\sigma(K)$ хордовую диаграмму, построенную следующим образом. Будем равномерно двигаться по ориентированной окружности в направлении ориентации, и для каждой её точки A рассмотрим соответствующую точку $f(A)$ сингулярного узла K . Соединим две точки окружности хордой, если они обе соответствуют некоторой точке самопересечения сингулярного узла K [PS96, 4.8], [CDM, 3.4.1]¹²⁾.

$$\lambda(\text{---}) = 0 \quad \lambda\left(\begin{array}{c} A \\ \diagup \diagdown \\ B \\ C' \\ C \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{c} A \\ \diagup \diagdown \\ B \\ C \\ C' \end{array}\right) + \lambda\left(\begin{array}{c} A \\ \diagup \diagdown \\ B \\ B' \\ C \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{c} A \\ \diagup \diagdown \\ B \\ C \\ B' \end{array}\right) = 0$$

Рис. 22. Одночленное и четырёхчленное соотношения

¹²⁾ Другими словами, рассмотрим произвольное кусочно-линейное отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, образ которого есть K . Проведём хорду XY для каждой пары точек X, Y такой, что $f(X) = f(Y)$. Хордовую диаграмму не следует путать с диаграммой Гаусса (проекции) узла $g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (несингулярного), которая определяется как (произвольным образом ориентированная) хордовая диаграмма композиции проекции $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с отображением g [PS96, 4.8] [CDM, 1.8.4].

$$v \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \diagdown \\ \diagup \end{array} \right) = v \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \diagup \\ \diagup \end{array} \right)$$

Рис. 23. Скейн-соотношение Васильева
(обратите внимание на разницу с рис. 21)

ТЕОРЕМА 11.1. Пусть $n \geq 0$ — целое и $\lambda: \delta_n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция из множества δ_n всех хордовых диаграмм с n хордами. Функция λ удовлетворяет одночленному и четырёхчленному соотношениям с рис. 22 тогда и только тогда, когда существует отображение $v: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ (т. е. инвариант сингулярных узлов), для которого

- (1) выполнено скейн-соотношение Васильева с рис. 23;
- (2_n) $v(K) = 0$ для любого сингулярного узла K , имеющего более n точек самопересечения;
- (3) $v(K) = \lambda(\sigma(K))$ для любого сингулярного узла K , имеющего ровно n точек самопересечения.

Доказательство выходит за рамки данного текста.

Насколько мне известно, теорема 11.1 Васильева — Концевича никогда раньше не формулировалась в таком виде, коротком и удобном для вычисления инвариантов (хотя эта формулировка неявно использовалась в процессе вычислений). Я благодарен С. Чмутову за подтверждение того, что теорема 11.1 верна и действительно эквивалентна теореме Васильева — Концевича в традиционной формулировке, см., например, [CDM, теорема 4.2.1], сп. [PS96, теорема 4.12].

Отображение $v: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, для которой выполнено условие (1), называется *инвариантом Васильева — Гусарова*. Если дополнительно выполнено условие (2_n), то v называется *инвариантом порядка не выше n*.

Следующее утверждение означает, что функция v из теоремы 11.1 единственна с точностью до инварианта Васильева — Гусарова порядка не выше $n - 1$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2 [CDM, предложение 3.4.2]. Разность $v - v'$ отображений $v, v': \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям (1), (2_n) и (3), удовлетворяет условиям (1) и (2_{n-1}).

ЗАДАЧА 11.3. (а) Докажите часть «тогда» теоремы 11.1.

(0), (1), (2) Докажите часть «только тогда» теоремы 11.1 для $n = 0, 1, 2$.

УКАЗАНИЕ. В случае $n = 2$ воспользуйтесь теоремой 9.4. (Часть «только тогда» теоремы 11.1 для $n = 3$ может быть доказана с использованием коэффициента при h^3 в $J(e^h)$, где J — t -параметризованный многочлен Джонса [CDM, 2.4.2, 2.4.3] [PS96, (4.6)].)

В оставшихся задачах используйте без доказательства часть «только тогда» теоремы 11.1. Далее утверждение « $v(K) = x$ для любого особого узла K с хордовой диаграммой A » сокращённо записывается как « $v(A) = x$ ».

Задача 11.4. (а) Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_2: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 2 такой, что $v_2(O) = 0$ для тривиального узла O , а $v_2(1212) = 1$. (Здесь (1212) обозначает единственную «нетривиальную» хордовую диаграмму с двумя хордами, см. [PS96, рис. 4.4], третья диаграмма в первом ряду.)

Указание. Это следует из теоремы 9.4, однако попробуйте вывести это из теоремы 11.1.

(б), (б'), (с), (д) Вычислите v_2 для (произвольным образом ориентированных) правого трилистника, левого трилистника, восьмёрки и узла 5_1 .

Задача 11.5. (а) Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_3: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 3 такой, что $v_3(O) = 0$ для тривиального узла O и левого трилистника O , а $v_3(123123) = 1$. (Здесь (123123) обозначает «самую симметричную нетривиальную диаграмму с тремя хордами», см. [PS96, рис. 4.4], пятая диаграмма во втором ряду.)

(б), (б'), (с), (д) Аналог задачи 11.4, для v_3 .

Указание. См. задачи 2, 3, 4ab и результаты теоремы 11, 13, 14 из [PS96, § 4].

Задача 11.6. (а) [PS96, задача 4.4.b] Существует единственный инвариант Васильева — Гусарова $v_4: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ порядка не выше 4 такой, что

- $v_4(O) = 0$ для тривиального узла O , левого трилистника O и правого трилистника O ;
- $v_4(12341234) = 2$, $v_4(12341432) = 3$, и $v_4(12341423) = 5$.

(б), (б'), (с), (д) Аналог задачи 11.4 для v_4 .

§ 12. ПРИЛОЖЕНИЕ: НЕКОТОРЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

1.1. (а), (б) «Проще всего изготовить трилистник и восьмёрку из вёлок или шнурка, а затем попытаться получить из этих узлов все узлы, изображённые на рис. 1. Выполнить некоторые преобразования трилистника и восьмёрки вам поможет рис. 24». [Pr95, § 2] (Левая часть рис. 24 выполнена Д. Кроо.)

(е) Рассмотрим два узла с совпадающими плоскими диаграммами в «горизонтальной» плоскости π . Для каждой точки X в пространстве пусть $p(X)$ — прямая, проходящая через X и перпендикулярная π . Пусть

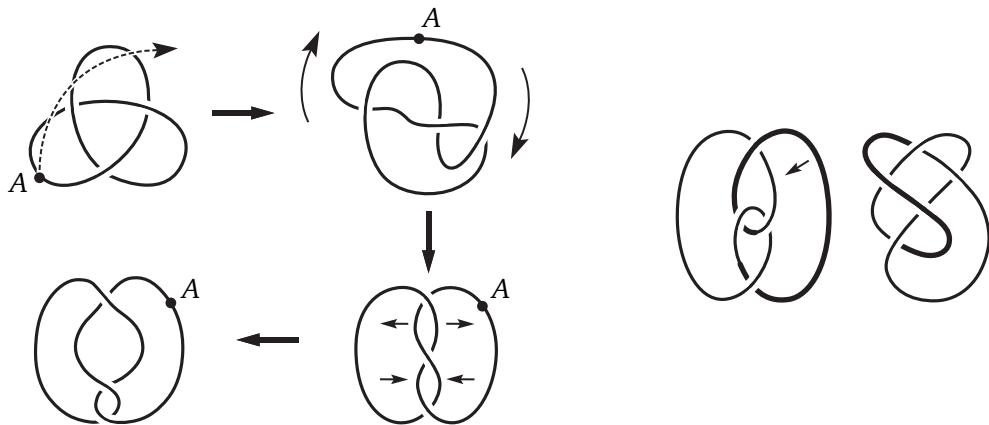


Рис. 24. Изотопии трилистника и восьмёрки

$h(X)$ — высота точки X относительно π , положительная ($h(X) > 0$), если X находится в верхнем полупространстве, и отрицательная ($h(X) < 0$), если X находится в нижнем полупространстве. Каждой точке A первого узла поставим в соответствие точку A' второго узла с помощью следующей процедуры.

Случай 1: проекция точки A на π не является перекрёстком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел только в точке A . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, прямая $p(A)$ пересекает второй узел также только в одной точке. Обозначим эту точку через A' .

Случай 2: проекция точки A на π является перекрёстком на плоской диаграмме. В этом случае прямая $p(A)$ пересекает первый узел ещё в одной точке B . Так как плоские диаграммы узлов совпадают, прямая $p(A)$ пересекает второй узел тоже в двух точках: C и D . Без ограничения общности можно считать, что $h(C) > h(D)$. Тогда если $h(A) > h(B)$, то положим $A' = C$, иначе $A' = D$.

Для каждой точки A первого узла и каждого числа $t \in [0, 1]$ пусть $A(t)$ — точка на прямой $p(A)$ на высоте

$$h(A(t)) = (1 - t)h(A) + th(A').$$

По построению $A(0) = A$, $A(1) = A'$, и искомой изотопией является преобразование первого узла,двигающее точку $A(0)$ к точке $A(1)$ с постоянной скоростью так, что в момент времени t она находится в положении $A(t)$.

1.3. См. рис. 25. Для каждого перекрёстка на плоской диаграмме выберем на участке перекрёстка, являющемся переходом, две точки, близкие к пересечению и находящиеся по разные стороны от него. Заменим

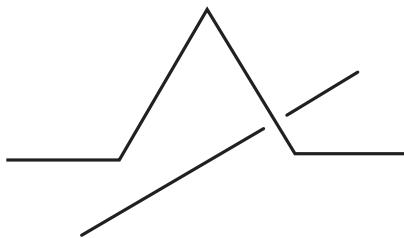


Рис. 25. Мостики через перекрёсток

отрезок между двумя выбранными точками «мостиком», соединяющим выбранные точки и «подымающимся» над плоской диаграммой. После замены всех перекрёстков такими «мостиками» мы получим искомый узел.

1.4. (а) Используйте утверждения 5.1 (б), 9.1 (а) и леммы 5.2 (а), (б), 9.2 (а), (б). Или можете воспользоваться утверждениями 6.1 (а), (б) и леммой 6.2.

(б) Рассмотрим любую связную сумму n трилистников. Согласно утверждениям 9.1 (а) и 9.3 (а), инвариант Кэссона этого узла равен n . Следовательно, по лемме 9.2 (а), (б) соответствующие узлы не изотопны для различных значений n .

2.2. (а) Чтобы отличить зацепление Хопфа от остальных, воспользуйтесь утверждением 4.1 и леммой 4.2. Чтобы отличить зацепление Уайтхеда от тривиального зацепления, воспользуйтесь утверждением 6.1 (или 10.3) и леммой 6.2 (или теоремой 10.2).

(б) Используйте утверждение 10.3 и теорему 10.2.

3.2. Выберем узел, проецирующийся на данную плоскую диаграмму тем же способом, что и в утверждении 1.3. Будем считать, что все «мостики» лежат в верхнем полупространстве относительно плоскости проекции. По предположению существуют точки X и Y узла, которые разбивают узел на две ломаные p и q такие, что

- q лежит на плоскости проекции и проходит только через проходы;
- p проецируется на ломаную p' , которая проходит только через переходы.

Возьмём точку Z в верхнем полупространстве и точку T в нижнем полупространстве. Построим изотопию между заданным узлом и замкнутой ломаной $XZYT$, которая изотопна тривиальному узлу. Построение изотопии состоит из трёх шагов, в каждом из которых точки X, Y остаются фиксированными.

Шаг 1. Изотопия между q и XZY . Предположим, что $q = A_0A_1 \dots A_n$, где $A_0 = X$ и $A_n = Y$. Тогда изотопия получается последовательностью

элементарных движений

$$A_0 A_1 \rightarrow A_0 T A_1, \quad T A_1 A_2 \rightarrow T A_2, \quad T A_2 A_3 \rightarrow T A_3, \quad \dots, \quad T A_{n-1} A_n \rightarrow T A_n.$$

Шаг 2. Изотопия между p и p' . Уберём все «мостики» с помощью элементарных движений.

Шаг 3. Изотопия между p' и XZY . Строится аналогично шагу 1.

3.3. Следует из утверждения 3.2.

Другая идея доказательства (ср. [PS96, теорема 3.8]). Обозначим через π горизонтальную плоскость, содержащую диаграмму. Для каждой точки X в пространстве $p(X)$ и $h(X)$ определяются как в доказательстве утверждения 1.1 (с). Пусть l — прямая на плоскости, которая проходит через вершину A_0 плоской диаграммы, и пусть вся диаграмма лежит по одну сторону от прямой l . Пусть A_0, A_1, \dots, A_n — все вершины плоской диаграммы в порядке их появления при движении вдоль диаграммы в некотором направлении. Выберем точки B_0, \dots, B_n так, что $A_i \in p(B_i)$ для $i = 1, \dots, n$ и $h(B_i) < h(B_j)$ для $i < j$. Пусть B_{n+1} — точка, проекция которой на π близка к A_0 , и $h(B_{n+1}) > h(B_n)$. Тогда узел $B_0 \dots B_n B_{n+1}$ изотопен три-виральному узлу. Действительно, по построению прямой l проекция узла на любую плоскость, перпендикулярную l , является замкнутой несамопересекающейся ломаной. Остаётся только изменить перекрёстки плоской диаграммы так, чтобы они согласовывались с проекцией построенного узла на плоскость π .

4.1. Ответ: 1 для зацепления Хопфа и 0 для остальных зацеплений.

4.2. При движениях I и III число перекрёстков, в которых первая компонента проходит над второй, не изменяется. При движении II это число изменяется на 0 или ± 2 .

4.3. (а) Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. По лемме о чётности (сформулированной перед утверждением 4.3) число таких перекрёстков, где первая компонента проходит над второй, имеет ту же чётность, что и число перекрёстков, где вторая компонента проходит над первой. Это в точности то, что нужно доказать.

(б) Примером является четвёртое зацепление на рис. 4. Используя целочисленный коэффициент зацепления, можно доказать, что это зацепление не изотопно три-виральному, см. § 8.

4.4. Существование. По лемме 4.2 коэффициент зацепления по модулю 2 является изотопическим инвариантом. Справедливость скайн-соотношения легко проверить непосредственно.

Единственность. Предположим, что f — другой инвариант, отличный от lk_2 и удовлетворяющий предположениям. Тогда $f - lk_2$ является изото-

тическим инвариантом, равным нулю на тривиальном зацеплении и инвариантным относительно изменений перекрёстков. Согласно аналогу леммы 3.3 для зацеплений любая плоская диаграмма зацепления может быть получена из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному, при помощи изменений перекрёстков. Следовательно, $f - lk_2 = 0$.

5.1. (а) Если P — такая точка на плоской диаграмме, как описано в утверждении 3.2, то не существует P -скрещивающихся пар перекрёстков. Следовательно, P -Арф-инвариант равен нулю.

5.2. (а) Пусть P_1 и P_2 — две отмеченные точки такие, что отрезок P_1P_2 содержит в точности один перекрёсток X .

Случай 1: P_1P_2 участвует в проходе. Тогда X не образует ни P_1 -скрещивающейся, ни P_2 -скрещивающейся пары ни с каким другим перекрёстком. Поэтому P_1 - и P_2 -Арф-инварианты диаграммы равны.

Случай 2: P_1P_2 участвует в переходе. Тогда X делит диаграмму на две замкнутые ломаные q_1 и q_2 такие, что P_1 лежит на q_1 , а P_2 лежит на q_2 . Обозначим через n_1 (соответственно, n_2) число всех таких перекрёстков на q_1 и q_2 , в которых q_1 проходит над q_2 (соответственно, q_2 проходит над q_1). Обозначим через N_1 количество P_1 -скрещивающихся пар, образованных X и некоторым пересечением ломаных q_1 и q_2 . Обозначим P_1 -Арф-инвариант диаграммы D через $\text{arf}_{P_1} D$. Аналогичные обозначения будем использовать и для отмеченной точки P_2 . Тогда

$$\text{arf}_{P_1} D - \text{arf}_{P_2} D = N_1 - N_2 = n_1 - n_2 \equiv_{\frac{2}{2}} n_1 + n_2 \equiv 0,$$

где D — данная плоская диаграмма. В последней формуле

- первое равенство выполнено, поскольку пара перекрёстков в D является P_1 -скрещивающейся или P_2 -скрещивающейся (но не одновременно!) тогда и только тогда, когда она образована перекрёстком X и некоторым пересечением ломаных q_1 и q_2 ;
- второе равенство выполнено, поскольку $N_1 = n_1$ и $N_2 = n_2$; действительно, точка пересечения ломаных q_1 и q_2 образует P_1 -скрещивающуюся (соответственно, P_2 -скрещивающуюся) пару с X тогда и только тогда, когда в этой точке q_1 проходит над (соответственно, под) q_2 ;
- $\equiv_{\frac{2}{2}}$ обозначает сравнение по модулю 2;
- последнее сравнение выполнено ввиду леммы о чётности, применённой к ломанным q_1 и q_2 .

(б) *Движение типа I.* Выберем отмеченные точки до и после движения как показано на рис. 26 (вверху). Проверьте, что перекрёсток A не образует P -скрещивающуюся пару ни с одним другим перекрёстком.

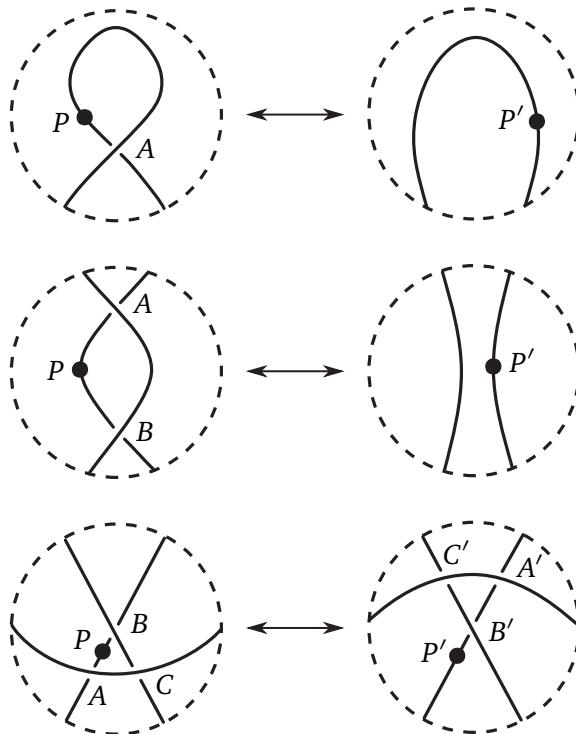


Рис. 26. Арф-инвариант не меняется при движениях Рейдемейстера

Движение типа II. Выберем отмеченные точки до и после движения как показано на рис. 26 (во втором ряду). Проверьте, что ни один из перекрёстков A , B не образует P -скрещивающуюся пару ни с каким другим перекрёстком.

Движение типа III. Выберем отмеченные точки до и после движения, как показано на рис. 26 (внизу). Проверьте, что ни один из перекрёстков A , B не образует P -скрещивающуюся пару ни с каким другим перекрёстком и что ни один из перекрёстков A' , B' не образует P' -скрещивающуюся пару ни с каким другим перекрёстком. Затем проверьте, что произвольный перекрёсток X , отличный от A , B , C , образует P -скрещивающуюся пару с C , если и только если X образует P' -скрещивающуюся пару с C' .

5.3. Рассмотрим любую связную сумму K двух трилистников. Из утверждения 7.4 (d) следует, что $\text{arf } K = 0$. В то же время по результату задачи 5.1 (b) и утверждению 9.3 (a) $c_2(K) \neq 0$. Поэтому K не изотопен тривиальному узлу.

5.4. Существование. По лемме 5.2, Арф-инвариант является изотопическим инвариантом. Приведём указания к проверке скейн-соотноше-

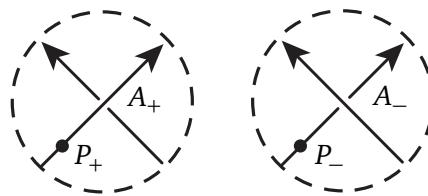
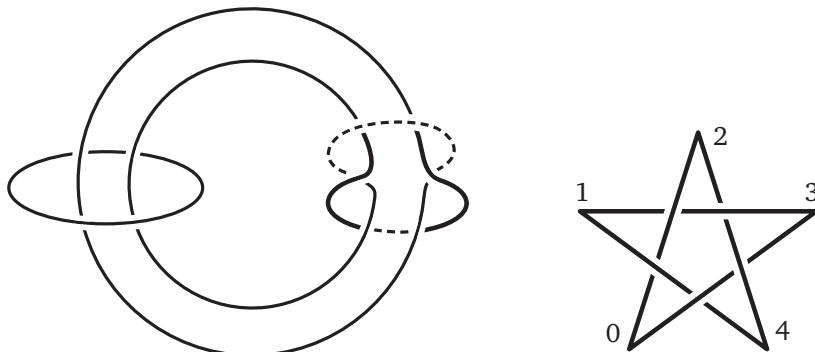


Рис. 27. К доказательству скейн-соотношения для Арф-инварианта

ния. Выберем отмеченные точки P_+, P_- , как показано на рис. 27. Проверьте, что перекрёсток A_- не образует P_- -скрещивающуюся пару ни с каким другим перекрёстком в K_- . Затем проверьте, что число таких перекрёстков, которые образуют P_+ -скрещивающуюся пару с A_+ в K_+ , сравнимо с $\text{lk}_2 K_0$ по модулю 2.

Единственность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4. Используйте саму лемму 3.3 вместо её аналога для зацеплений.

Рис. 28. Раскраска зацепления в 3 цвета и раскраска узла 5_1 в 5 цветов

6.1. Ответы: (b), (e), (h) — 3-раскрашиваемы, (a), (c), (d), (f), (g), (i) — не раскрашиваемы. Пример раскрашенного в три цвета трилистника см. в [Pr95, с. 30, рис. 4.3]. Правильную раскраску последней диаграммы с рис. 4 см. на рис. 28 слева. (Эта диаграмма была ошибочно названа нераскрашиваемой в три цвета в [Pr95, § 4]. Эта небольшая ошибка была найдена Л. Баннёром, С. Зотовой и Л. Кравцовой.)

6.3. (a) Большая часть п. (a) следует из леммы 6.2 и утверждений 6.1 (d)–(h) (см. [Pr95, с. 30]). Последняя диаграмма на рис. 4 отличается от тривиального зацепления числом правильных раскрасок плоской диаграммы. Докажите, что это число сохраняется при движениях Рейдемайстера.

(b) Плоская диаграмма называется *раскрашиваемой в 5 цветов*, если существует раскраска её дуг в цвета 0, 1, 2, 3, 4 такая, что хотя бы два

цвета использованы и в каждой точке пересечения если верхняя дуга имеет цвет a , а две нижние дуги — цвета b и c , то $2a \equiv b + c \pmod{5}$. Аналогично лемме 6.2 можно показать, что раскрашиваемость в 5 цветов сохраняется при движениях Рейдемейстера. Узел 5_1 является раскрашиваемым в 5 цветов (см. рис. 28 справа), а тривиальный узел — нет. Поэтому они не изотопны.

7.1. (b) Первое решение. Назовём ориентированную ломаную *положительной*, если ограниченная ею часть плоскости лежит слева от любого её звена (здесь используется теорема Жордана, сформулированная в замечании 3.1). Покажите, что положительность ломаной сохраняется при элементарных движениях.

Указание ко второму решению. Положительность ломаной из предыдущего решения можно эквивалентно определить следующим образом. Будем говорить, что ориентированная ломаная $A_1 \dots A_n$ *положительна*, если для любой её внутренней точки O сумма ориентированных углов $\angle A_1 O A_2 + \angle A_2 O A_3 + \dots + \angle A_{n-1} O A_n + \angle A_n O A_1$ положительна (т. е. индекс всякой внутренней точки ломаной относительно самой ломаной положителен).

7.2. Каждый из трёх указанных ориентированных узлов переводится в ориентированный узел с противоположной ориентацией вращением на угол π относительно «вертикальной» оси, проходящей через «самую верхнюю» точку узла (см. самую левую диаграмму на рис. 1 в первом и втором ряду для трилистника и восьмёрки соответственно). Это вращение входит в непрерывное семейство вращений на угол πt , $t \in [0, 1]$, относительно той же прямой. Это и есть требуемая изотопия.

7.7. (d) Проверьте, что всякая точка пересечения разных компонент в $K \# L$ получается из точки пересечения разных компонент в K или точки пересечения разных компонент в L .

8.1. Ответы: $\pm 1; 0$.

8.3. (a) Доказательство аналогично доказательству утверждения 4.3 (a). Рассмотрим плоскую диаграмму зацепления. Из леммы о тривиальности (сформулированной перед утверждением 8.3) следует, что сумма знаков точек пересечения, в которых первая компонента выше второй, противоположна сумме знаков точек пересечения, в которых вторая компонента выше первой. Поскольку перестановка компонент зацепления меняет знаки всех точек пересечения компонент, коэффициент зацепления не меняется.

(b) Смена ориентации любой компоненты меняет знаки всех точек пересечения.

(с) Достаточно рассмотреть любую связную сумму пяти зацеплений Хопфа, у которых ориентации на компонентах выбраны таким образом, чтобы их коэффициент зацепления был равен -1 .

(д) Доказательство аналогично 7.4 (d). Множество перекрёстков в плоской диаграмме зацепления $K \# L$ является объединением множеств перекрёстков в плоских диаграммах зацеплений K и L , причём знак каждого перекрёстка в $K \# L$ совпадает со знаком этого перекрёстка в соответствующем ему зацеплении K или L .

(е) Примером является зацепление Уайтхеда (оно не изотопно тривиальному по теореме 2.2а).

9.1. (а) Ответы: 0, 1 и -1 .

Тривиальный узел не имеет перекрёстков, а значит, в нём нет и скрещивающихся пар перекрёстков. Поэтому инвариант Кэссона этого узла равен нулю.

Все три перекрёстка трилистника имеют одинаковый знак. Так как трилистник имеет только одну скрещивающуюся пару перекрёстков (вне зависимости от выбора отмеченной точки), инвариант Кэссона этого узла равен 1.

(б) Рассмотрим любую связную сумму пяти восьмёрок. По п. (а) и утверждению 9.3 (а) ниже, инвариант Кэссона этого узла равен -5 .

9.2, 9.3 (а), 9.4. Доказательства аналогичны доказательствам леммы 5.2, утверждения 5.3 и теоремы 5.4 соответственно. Важно следить за знаками точек пересечения. Для доказательства леммы 9.2 (а) воспользуйтесь леммой о тривиальности, сформулированной перед утверждением 8.3.

9.3. (б) Рассмотрим любую связную сумму трилистника и восьмёрки. По п. (а) и утверждению 9.1 (а) инвариант Кэссона этого узла равен нулю. Однако по утверждениям 10.3 (d), (e) и 10.5 (c) многочлен Конвея этого узла равен $(1+t^2)(1-t^2) \neq 1$. Значит, этот узел не изотопен тривиальному узлу.

10.1. (б) Ответ: 0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Инвариант $\text{arf} = c_2 \bmod 2$ для зацеплений, вообще говоря, зависит от ориентации компонент (см. [CDM, 2.3.4] для инварианта $c_3 \bmod 2$).

Пусть D — плоская диаграмма некоторого зацепления. Обозначим через $\text{cr } D$ количество перекрёстков в D , а через $\text{ch } D$ минимальное число изменений перекрёстков, необходимое для получения из D диаграммы зацепления, изотопного тривиальному (такая последовательность изменений перекрёстков существует по аналогу леммы 3.3 для зацеплений).

10.2. Единственность доказывается аналогично теоремам 8.4, 9.4; сначала решите задачу 10.3.

Вывод сильной версии (для неупорядоченных зацеплений) из слабой (для упорядоченных зацеплений). Достаточно доказать, что все инварианты c_n , определённые для упорядоченных зацеплений, сохраняются при изменении порядка компонент.

Пусть D — плоская диаграмма некоторого зацепления с двумя или более компонентами и пусть D' — плоская диаграмма, полученная из D изменением порядка компонент. Доказательство проведём индукцией по $\text{cr } D$. Если $\text{cr } D = 0$, то D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному, и по утверждению 10.3 (b) имеем $C(D) = 0$ для любого порядка компонент. Предположим, что $\text{cr } D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $\text{ch } D$. Если $\text{ch } D = 0$, то D — диаграмма зацепления, изотопного тривиальному; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $\text{ch } D > 0$. Пусть D_* — зацепление, полученное из D таким изменением перекрёстка, что $\text{ch } D_* < \text{ch } D$. Обозначим через D'_* зацепление, полученное из D' изменением того же перекрёстка. Тогда

$$\pm(C(D) - C(D_*)) = C(D_0) \quad \text{и} \quad \pm(C(D') - C(D'_*)) = C(D'_0),$$

где D_0 — диаграмма зацепления K_0 (с некоторым порядком компонент) на рис. 21, D и D_* — это D_+ и D_- в некотором порядке, а D'_0 обозначает то же самое для D' , D'_* . Заметим, что диаграммы D_* и D'_* совпадают с точностью до порядка компонент. То же верно для диаграмм D_0 и D'_0 . Так как $\text{ch } D_* < \text{ch } D$ и $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, по предположению индукции имеем

$$C(D_*) = C(D'_*) \quad \text{и} \quad C(D_0) = C(D'_0).$$

Тогда $C(D) = C(D')$.

10.3. Ответы: (a), (b) 0; (c) $\pm t$; (d) $1 + t^2$; (e) $1 - t^2$; (f) $\pm t^3$; (g) $\pm t^4$; (h) $1 + 3t^2 + t^4$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Знаки в ответах к пп. (c), (f), (g) зависят от ориентации компонент.

УКАЗАНИЕ. Примеры вычислений для пп. (a), (c) и (d) см. в [CDM, 2.3.2].

10.4. Пусть D — плоская диаграмма данного зацепления K .

(а) Для любой диаграммы D_* , полученной из D изменением перекрёстка, имеем $c_0(D) - c_0(D_*) = 0$, т. е. c_0 не меняется при изменениях перекрёстков. По аналогу леммы 3.3 для зацеплений диаграмма D может быть получена изменениями перекрёстков из диаграммы зацепления, изотопного тривиальному. Утверждение следует из определения c_0 на тривиальном узле и утверждения 10.3 (b).

(b), (c) Первые части обоих утверждений являются частными случаями п. (d). Вторые части обоих утверждений следуют из определения c_1, c_2 и теорем 8.4, 9.4.

(d) Доказательство индукцией по $\text{cr } D$. Если $\text{cr } D = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению. Если K — узел, то $C(D) = 1$. В противном случае $C(D) = 0$ по утверждению 10.3 (b). Предположим, что $\text{cr } D > 0$; тогда продолжим доказательство индукцией по $\text{ch } D$. Если $\text{ch } D = 0$, то K изотопно тривиальному зацеплению; этот случай рассмотрен выше. Предположим, что $\text{ch } D > 0$. Пусть D_* — зацепление, полученное из D изменениями перекрёстков и такое, что $\text{ch } D_* < \text{ch } D$. Тогда

$$\pm(c_j(D) - c_j(D_*)) = c_{j-1}(D_0),$$

где D_0 — диаграмма с рис. 21, D и D_* — это D_+ , D_- в некотором порядке. Заметим, что зацепление D_* состоит из k компонент, а зацепление D_0 состоит из $k' = k \pm 1$ компонент. Поэтому если $j \leq k - 2$, то $j - 1 \leq k'$, и если $j - k$ чётно, то и $(j - 1) - k'$ чётно. Так как $\text{ch } D_* < \text{ch } D$ и $\text{cr } D_0 < \text{cr } D$, по предположению индукции имеем $c_j(D_*) = c_{j-1}(D_0) = 0$. Тогда $c_j(D) = 0$.

(e) Докажите аналогично п. (d), что $c_j(D) = 0$ для любой плоской диаграммы D и $j > \text{cr } D$.

10.5. (a) Доказывается аналогично утверждению 10.4 (d).

(c) Пусть D и E — плоские диаграммы зацеплений K и L . Аналогично утверждению 10.4 (d) покажите, что $C(D \# E) = C(D)C(E)$ индукцией по $\text{cr } D$ при фиксированном E .

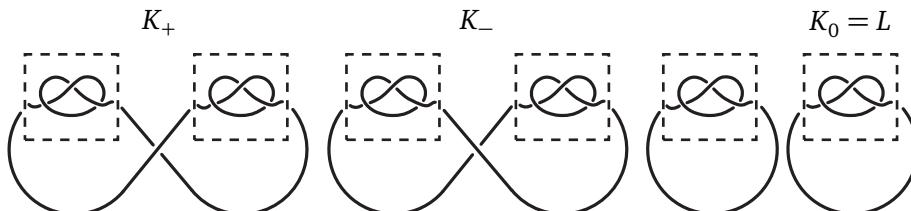


Рис. 29. Доказательство равенства $C(\text{разделяемое зацепление}) = 0$

10.6. (a) Следует из утверждений 10.3 (c), (f), (g) и пп. (b), (c).

(c) Если L — разделяемое зацепление, то существуют зацепления K_+, K_-, K_0 такие, что

- их плоские диаграммы отличаются как на рис. 21;
- зацепления K_+ и K_- изотопны;
- зацепление K_0 изотопно L .

Получаем $C(L) = C(K_0) = \frac{1}{t}(C(K_+) - C(K_-)) = 0$ (рис. 29).

БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарю А. Еннэ за подготовку рисунков и работу над [EEF] после Летней конференции, Е. Морозова за перевод обновлённой мной версии на русский язык и А. Глебова, Д. Елисеева, А. Еннэ, Р. Живалевича, Е. Морозова, А. Рябичева, А. Сосинского, М. Фёдорова, Н. Хорошавкину, С. Чмутова за полезные обсуждения и нашу работу над [EEF]. Благодарю редколлегию «Математического просвещения» за полезные обсуждения. Этот текст основан на лекциях автора в Независимом Московском университете (включая Math in Moscow Program) и в Московском физико-техническом институте, а также на проекте Летней конференции [EEF].

В списке литературы звёздочками отмечены книги, обзоры и популярные статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Al28] *Alexander J. W. Topological invariants of knots and links // Trans. AMS. 1928. Vol. 30, № 2. P. 275–306.*
- [As] *Asanau A. A simple proof that connected sum of ordered oriented links is not well-defined (preprint).*
- [CDM] * *Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev knot invariants. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.*
<http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin/papers/cdbook>
- [CG83] *Conway J. H., Gordon C. M. A. Knots and links in spatial graphs // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7. P. 445–453.*
- [CSK] * https://en.wikipedia.org/wiki/Connected_sum#Connected_sum_of_knots
- [EEF] * *Теория узлов и зацеплений для пользователя // 31-я Летняя конференция Турнира городов.* <https://www.turgor.ru/lktg/2019/3/>
- [Ga19] *Гараев Т. Р. Элементарное доказательство существования полинома Конвея. arXiv:2012.03086.*
- [IRS] * *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б. Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 164–177.*
- [HC19] * *Clemens C. H. Two-Dimensional Geometries. A Problem-Solving Approach. Providence, RI: AMS, 2019. (Pure and Applied Undergraduate Texts; Vol. 34).*
- [Ka06] *Kauffman L. H. Formal Knot Theory. Dover Publications, 2006.*

- [Ka06'] *Kauffman L. H.* Remarks on Formal Knot Theory. arXiv:math/0605622
 (отметим, что в оглавлении на с. 1 номера и названия параграфов ошибочны).
- [Ka87] *Kauffman L. H.* On knots. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1987. (Annals of Mathematics Studies; Vol. 115).
- [Ko19] *Kogan E.* Linking of three triangles in 3-space, arXiv:1908.03865.
- [Ma18] * *Manturov V.* Knot Theory / 2nd edition. Boca Raton, FL: CRC press. 2018.
- [Pr95] * *Prasolov V. V.* Intuitive topology. Providence, RI: AMS, 1995. (Mathematical World; Vol. 4). Translated from the Russian manuscript by A. Sossinsky.
- [Pr98] * *Przytycki J. H.* 3-coloring and other elementary invariants of knots // Knot theory (Warsaw, 1995). Warsaw: Polish Acad. Sci. Inst. Math., 1998. (Banach Center Publ.; Vol. 42). P. 275–295. arXiv:math.GT/0608172.
- [PS96] * *Prasolov V. V., Sossinsky A. B.* Knots, Links, Braids, and 3-manifolds. Providence, RI, AMS, 1996.
- [Ra20] * *Райгородский А. М.* Математика раскрасок // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 27. М.: МЦНМО, 2021. С. 99–127.
- [Sk] * Скопенков А. Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения. <http://www.mccme.ru/circles/oim/algort.pdf>
- [Sk20u] *Skopenkov A.* A user's guide to basic knot and link theory // Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial. To appear in 2021. (Contemp. Math. Amer. Math. Soc.; Vol. 772). arXiv:2001.01472.
- [Sk14] * *Skopenkov A.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. arxiv:1402.0658.
- [Sk15] *Skopenkov A.* Classification of knotted tori // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. 2020. Vol. 150, № 2. P. 549–567. arXiv:1502.04470.
- [Sk16c] * *Skopenkov A.* Embeddings in Euclidean space: an introduction to their classification // Boll. Man. Atl. (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_in_Euclidean_space:_an_introduction_to_their_classification
- [Sk16e] * *Skopenkov A.* Embeddings just below the stable range: classification // Boll. Man. Atl. (to appear). http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Embeddings_just_below_the_stable_range:_classification
- [Sk18] * *Skopenkov A.* Invariants of graph drawings in the plane // Arnold Math. J. 2020. Vol. 6. P. 21–55. Полная версия: arXiv:1805.10237.
- [Sk16i] * *Skopenkov A.* Isotopy // Boll. Man. Atl. (submitted).
<http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Isotopy>

- [Sk20] * Скопенков А. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО, 2020. [Электронная версия]:
<http://www.mccme.ru/circles/oim/home/comktop13.htm#photo>.
- [So89] * Сосинский А. Б. Узлы, зацепления и их многочлены // Квант. 1989. № 4. С. 11–18.
http://kvant.mccme.ru/1989/04/uzly_zacepleniya_i_ih_polinomy.htm
- [Su92] * Судзуки Д. Наука дзэн — ум дзэн. Киев: Преса України, 1992.
- [ZSS] * Элементы математики в задачах: через олимпиады и кружки к профессии. М.: МЦНМО, 2018.
<http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf>